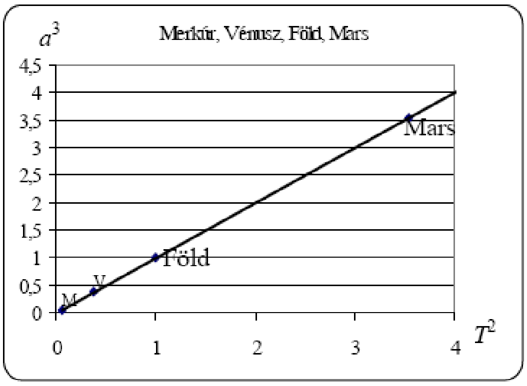
a) *A feladatban kért grafikon elkészítése:*

T^2 (év^2)	a^3 (egység^3)
0,058	0,058
0,378	0,378
1	1
3,538	3,53



(Táblázat nélkül is megadható.)

5 pont
(bontható)

b) *A kérdezett törvény megadása, Kepler III. törvényének megnevezése vagy a törvény kimondása:*

4 pont
(bontható)

Indoklás:

4 pont
(bontható)

A grafikon alapján $\frac{T^2}{r^3}$ állandó, vagy T^2 egyenesen arányos r^3-nal.

(A teljes pontszám akkor adható meg, ha a válaszból egyértelműen kiderül, hogy T^2 és r^3 között egyenes arányosság az összefüggés és a grafikon alapján az igazolható is.)

c) *Annak felismerése, hogy a grafikon a Nap körül keringő Uránusz bolygóra általánosítható:*

2 pont

(Ha az alábbiak szerint folytatja a feladatot, a 2 pont automatikusan jár.)

Az aránypár felírása az Uránusz bolygóra és egy másik bolygóra:

2 pont

pl. a Földre $\frac{T^2_{Föld}}{r^3_{Föld}} = \frac{T^2_{Uránusz}}{r^3_{Uránusz}}$

A keresett konkrét távolságérték meghatározása az Uránuszra:

3 pont
(bontható)

$$\frac{T^2_{Föld}}{r^3_{Föld}} = \frac{T^2_{Uránusz}}{r^3_{Uránusz}} \quad \rightarrow \quad r_{Uránusz} = \sqrt[3]{\frac{T^2_{Uránusz}}{T^2_{Föld}}}\, r_{Föld} = 19{,}2 \text{ egység}$$

(Behelyettesítés 1 pont, számítás 1 pont, helyes eredmény 1 pont.)

Összesen **20 pont**

d) *A mozgás elemzése Kepler I. és II. törvénye alapján:*

Kepler I. törvényének megfelelően a Nap körül keringő üstökös olyan ellipszispályán mozog, amelynek egyik fókuszában a Nap áll. Mivel a Halley-üstökös esetén a naptávoli helyzetben a Naptól mért távolság sokkal nagyobb, mint a napközeli helyzetben, ezért az ellipszispálya – szemben a Föld pályájával – erősen elnyújtott.

3 pont

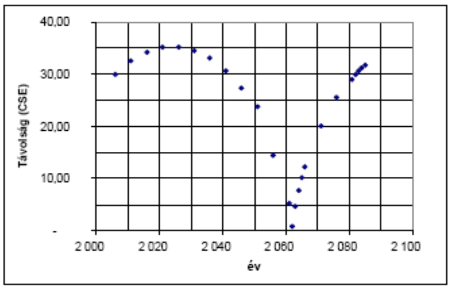
(Ha a jelölt nem nevesíti az ellipszispályával kapcsolatban Kepler I. törvényét, de megállapításai helyesek, 2 pont adható.)

Kepler II. törvénye szerint a Naptól az üstököshöz húzott vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol. Az elnyújtott ellipszispálya miatt ez akkor teljesülhet, ha napközelben az üstökös sokkal nagyobb sebességgel halad, mint naptávolban. Ennek eredményeként naptávolban ugyanazon ellipszisíveket sokkal hosszabb idő alatt teszi meg, mint napközelben.

3 pont

(Ha a jelölt nem fogalmazza meg pontosan Kepler II. törvényét, de utal arra, hogy az üstökös sebessége a naptávolban lényegesen kisebb, mint napközelben, s ez összhangban van Kepler II. törvényével, a 3 pont megadható. Ha a jelölt nem nevesíti a pálya menti sebességekkel kapcsolatban Kepler II. törvényét, de megállapításai helyesek, 2 pont adható.)

. **Összesen** **18 pont**



(A feladat értékelésekor minden részpontszám bontható.)

a)

A következő napközeli időpont meghatározása:

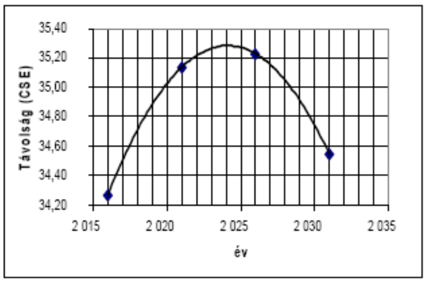
3 pont

A Halley-üstökös legközelebb 2062-ban lesz napközelben.

b)

A következő naptávoli időpont meghatározása:

2 pont



Az üstökös 2024-ban lesz legközelebb naptávolban.
(Az eredmény a táblázat elemzésével, grafikus ábrázolással egyaránt megkapható, minden elvileg helyes módszer elfogadható. ± 2 év hibahatáron belül ne vonjunk le pontot.)

A periódusidő meghatározása:

4 pont

Az egymást követő naptávoli és a napközeli időpontok különbsége a fél periódusidőt adja, a Halley-üstökös esetében ez 38 év (2062-2024), a periódusidő pedig T = 76 év.
(Teljes értékű megoldás a táblázat adataiból való közvetlen leolvasása a periódusidőnek: pl. a 2006-os és 2082-es adatok összevetése. Az elvileg helyes ± 2 év hibahatáron belüli eredmény esetében maximális pont adható. Örökletes hibát követő, de elvileg helyes számítás során a részfeladatban ± 2 év pontatlanság tolerálható, ilyenkor a teljes részpontszám megadható. Amennyiben a jelölt a 2026-os (naptávoli) és 2062-es (napközeli) adatokból számolva 36 x 2 = 72 évben adta meg a periódusidőt, a **b)** részre 4 pont adható.)

c)

A legutóbbi napközeli időpont meghatározása:

3 pont

A legutóbbi napközeli helyzet (2062 – 76 = 1986) 1986-ban volt.

(Az elvileg helyes ± 2 év hibahatáron belüli eredmény esetében maximális pont adható. Örökletes hibát követő, de elvileg helyes számítás során a teljes részpontszám megadható.)

3. feladat

Adatok: $v_1 = 3{,}9\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$, $h_1 = 20\,000\ \mathrm{km}$, $h_2 = 30\,000\ \mathrm{km}$, $R_{\mathrm{Föld}} \approx 6400\ \mathrm{km}$

I. megoldás: Kepler törvényének alkalmazása

A műhold pályasugarának kiszámítása a két esetben:

1 + 1 pont

$r = h + R_{\mathrm{Föld}}$, amiből $r_1 = 26\,400\ \mathrm{km}$, illetve $r_2 = 36\,400\ \mathrm{km}$

Az első keringési idő és pályamenti sebesség összefüggésének felírása:

2 pont

$$v = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}$$

Az első keringési idő kiszámítása:

1 + 1 pont

$T_1 = 42\,500\ \mathrm{s}$
(rendezés és számítás)

Kepler III. törvényének felírása a két pályára:

3 pont

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Az új pálya keringési idejének kiszámítása:

2 + 1 pont

$T_2 = \sqrt{T_1^2\cdot\frac{r_2^3}{r_1^3}}$ ebből $T_2 = 68\,800\ \mathrm{s}$
(rendezés és számítás)

Az új pályamenti sebesség felírása és kiszámítása :

2 + 2 pont

$$v_2 = \frac{2\cdot\pi\cdot r_2}{T_2} = 3{,}3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Összesen 16 pont

4. feladat

a) Annak felismerése, hogy a Kepler-törvények a műhold–Föld viszonylatban is érvényesek:

3 pont

(Kepler III. törvényének formális fölírása e felismerést mutatja, ezért külön megfogalmazás nélkül is megadható a pontszám.)

Kepler III. törvényének megfogalmazása:

2 pont

$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}$, ahol T a keringési időket, r a pályasugarakat jelenti.

(A 2 pont csak akkor adható meg, ha a vizsgázó megoldásából – pl. a behelyettesítésből – a betűk jelentése kiderül, de emellett a pontszám megadható akkor is, ha az értékek hibásan vannak megállapítva.)

A geostacionárius műhold keringési idejének és pályasugarának meghatározása:

T_2 = 24 óra

2 pont

r_2 = 6380 km + 35 786 km = 42 166 km

2 pont

A kisebb tömegű műhold keringési idejének kiszámítása:

4 pont (bontható)

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3};\quad \frac{T_1^2}{T_2^2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3=\left(\frac{20180}{42166}\right)^3=0{,}1096;\quad \frac{T_1}{T_2}=\sqrt{0{,}1096}=0{,}331;$$

$$T_1=0{,}331\cdot 24\text{ h}=7{,}94\text{ h}\approx 8\text{ h}$$

Válasz az a) kérdésre:

2 pont

A keringési idők összehasonlítása alapján megállapítható, hogy a kisebb műhold nem marad le a Föld egy kiválasztott, Egyenlítőn fekvő pontjához képest, sőt, gyorsabban kering, mint ahogy a Föld forog.
(Ha a vizsgázó Kepler III. törvénye alapján az arányosságokra hivatkozva a fenti számítások nélkül adja meg a választ, a 2 pont megadható.)

b) A kisebb tömegű műhold 1 óra alatt megtett útjának kiszámítása

3 pont (bontható)

T = 8 h alatt $2r\pi$ utat tesz meg, ezért 1 h alatt ennek nyolcadrészét, vagyis

$$s=\frac{2\cdot 20180\text{ km}\cdot 3{,}14}{8}=15\,841\text{ km utat tesz meg.}$$

(Ha a vizsgázó az előző részben nem számolt, és a számításokat a *b)* részben végzi el, az arra járó pontszámot itt kell megadni.)

Összesen: 18 pont

5. feladat

Kepler III. törvényének alkalmazása

$$\frac{T^2}{T_H^2} = \frac{r^3}{r_H^3}$$ ***3 pont***

(Ha a vizsgázó szövegesen megfogalmazza a Kepler-törvény alkalmazhatóságát, de nem írja fel és semmilyen formában nem is használja, akkor 2 pont adható.)

Adatok felhasználása

A Hold keringési ideje: $T_H \approx 28$ nap (bármelyik keringési idő elfogadható) ***1 pont***

$$\frac{r}{r_H} = \frac{1}{4}$$ ***1 pont***

A műhold keringési idejének kiszámítása

$$\left(\frac{T}{T_H}\right)^2 = \frac{1}{64}$$ ***2 pont***

$$\frac{T}{T_H} = \frac{1}{8} \rightarrow T = \frac{T_H}{8}$$ ***2 pont***

$T = 3{,}5$ nap ***1 pont***

Összesen: 10 pont