Körmozgás és forgómozgás

(Vázlat)

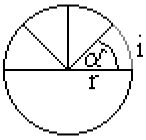
I. Egyenletes körmozgás
   a) Mozgás leírását segítő fogalmak, mennyiségek
   b) Egyenletes körmozgás kinematikai leírása
   c) Egyenletes körmozgás dinamikai leírása

II. Egyenletesen változó körmozgás
   a) Egyenletesen változó körmozgás kinematikai leírása
   b) Egyenletesen változó körmozgás dinamikai leírása

III. Forgómozgás
   a) Forgómozgás létrejöttének dinamikai feltétele
   b) Forgási energia
   c) Perdület, perdülettétel, perdület-megmaradásának törvénye

I. Egyenletes körmozgás

a) Mozgás leírását segítő fogalmak, mennyiségek



- A körmozgás a periodikus mozgások közé tartozik.
- A mozgás pályája egy kör.

- A mozgás egy periódusának nevezzük azt, amikor a test elindul a pálya egy pontjából, teljes körébe befutja, és visszatér ugyanabba a pontba.

- Periódus idő: Egy periódus megtételéhez szükséges idő
  Jele: T [T]= s

- Fordulatszám: Egy másodperc alatt megtett periódusok száma
  Jele: n
  $n = \frac{1}{T}$ $[n] = \frac{1}{s}$

Azt a körmozgást nevezzük egyenletesnek, ahol teljesül, hogy a test egyenlő idők alatt egyenlő íveket fut be, tehát 2x 3x hosszabb idő alatt a befutott ív is 2x 3x hosszabb.

b) Egyenletes körmozgás kinematikai leírása

Kerületi sebesség

- *Iránya* minden pillanatban érintő irányú.
- *Nagyságát megkapjuk, ha az ívet osztjuk az ív megtételéhez szükséges idővel.*

$$\mathbf{v_k = \frac{i}{t}},$$

illetve a teljes körív osztva a körív megtételéhez szükséges idővel.

$$v_k = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot n$$

- A kerületi sebesség nagysága függ a sugártól.

Szögsebesség

Megkapjuk, ha a radiánban kifejezett szögelfordulást osztjuk a szögelforduláshoz szükséges idővel.

Jele: ω

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

- Az egyenletes körmozgást végző test 2x 3x hosszabb idő alatt, 2x 3x nagyobb szöggel fordul el.
- Így a szögelfordulás és a szögelforduláshoz szükséges idő között egyenes arányosság van. ($\alpha \sim t$) A kettő hányadosa állandót határoz meg egyenletes mozgás esetén.
- Ezt az állandót nevezzük szögsebességnek.

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot n$$

A kerületi sebesség és a szögsebesség kapcsolata egyenletes mozgás esetén

$$v_k = \underline{2} r \underline{\pi \cdot n}$$
$$\omega = \underline{2\pi \cdot n}$$

$$v_k = \omega \cdot r$$

A kerületi sebesség egyenesen arányos a sugárral, az arányossági tényező a szögsebesség.

Centripetális gyorsulás

- Az egyenletes körmozgást végző test sebességének nagysága nem változik, de iránya minden pillanatban más.

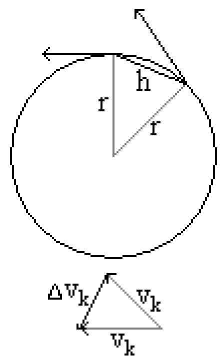
- Ebből az is következik, hogy a sebességvektor változik. Ennek következménye, hogy az egyenletes körmozgás gyorsuló mozgás.
- A sebességvektor időegységre történő megváltozását centripetális gyorsulásnak nevezzük.

Jele: a_{cp}

$$a_{cp}=\frac{\Delta v_k}{\Delta t}=\frac{r\,\Delta\omega}{\Delta t}$$

Centripetális gyorsulás nagyságának levezetése

A sebességvektorok által meghatározott háromszög és a sugár és a húr által meghatározott háromszögek egymáshoz hasonlóak. Ezért oldalaik aránya megegyezik.



$$\frac{\Delta v_k}{v_k}=\frac{h}{r} \qquad \Delta v_k=\frac{h\cdot v_k}{r} \qquad /:\Delta t$$

$$\frac{\Delta v_k}{\Delta t}=\frac{h\cdot v_k}{\Delta t\cdot r} \qquad h\approx i \rightarrow$$ mivel nagyon közeli pontokat vizsgálunk

$$\frac{\Delta v_k}{\Delta t}=\frac{i\cdot v_k}{\Delta t\cdot r}$$

$$\boxed{a_{cp}=v_k\cdot\omega} \qquad v_k=\omega\cdot r\rightarrow\boxed{a_{cp}=r\cdot\omega^2}$$

$$\omega=\frac{v_k}{r}\rightarrow\boxed{a_{cp}=\frac{v_k^2}{r}}$$

A centripetális gyorsulás állandó nagyságú és iránya minden pillanatban a kör középpontja felé mutat. (V_k-ra merőleges!)

c) Egyenletes körmozgás dinamikai leírása

Azt vizsgáljuk, hogy milyen eredő erőnek kell egy pontszerű testre hatni, hogy az egyenletes körmozgást végezzen.
A dinamikai feltétel Newton II. törvényéből vezethető le.
$Fe = m \cdot a \rightarrow \quad F_{cp} = m \cdot a_{cp}$
Egyenletes körmozgásnál az eredő erőt centripetális erőnek nevezzük, a gyorsulást pedig centripetális gyorsulásnak.

Egy pontszerű test akkor végez egyenletes körmozgást, ha rá olyan eredőerő hat, amelynek nagysága állandó, és iránya minden pillanatban a kör középpontja felé mutat.

$$F_{cp} = m \cdot \omega \cdot v_k \qquad F_{cp} = m \cdot \frac{v_k^2}{r} \qquad F_{cp} = m \cdot r \cdot \omega^2$$

Példák egyenletes körmozgásra

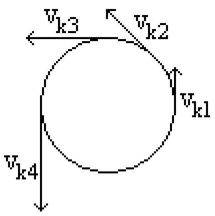
- Lemezjátszó korongjának egy pontja, ha az állandó szögsebességgel forog.
- Állandó sebességgel haladó autó kerekének egy pontja (nem a tengely)
- Óriáskerék egyik kocsija.

II. Egyenletesen változó körmozgás

a) Egyenletesen változó körmozgás kinematikai leírása

- A mozgás pályája a kör.
- Egyenletesen változó körmozgásnál, a kerületi sebességnek nemcsak az iránya, de a nagysága is változik.

Pl.: Gyorsuló körmozgás



A kerületi sebesség vektor időegységre eső megváltozását **érintő irányú gyorsulás**nak nevezzük.

Jele: $\mathbf{a_é}$

$$\mathbf{a_é = \frac{\Delta v_k}{\Delta t}}$$

- Az érintő irányú gyorsulás számmértéke kifejezi, hogy 1 másodperc alatt mennyivel változik meg a kerületi sebességnek a nagysága.

- Az érintő irányú gyorsulás mindig a körpálya érintőjének irányába mutat.

Szöggyorsulás: Egyenletesen változó körmozgásnál a szögsebesség az idővel arányosan változik.

$$a_é = \frac{\Delta v_k}{\Delta t} = \frac{\Delta r\omega}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \beta \longrightarrow \boxed{a_é = \beta \cdot r}$$

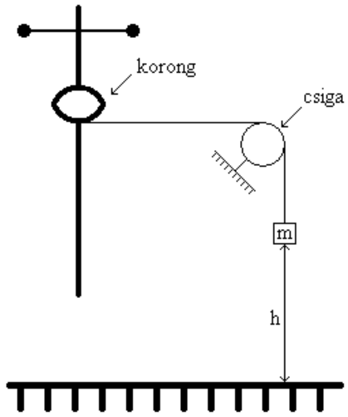
$$[\beta] = \frac{\frac{1}{s}}{s} = \frac{1}{s^2}$$

A szögsebességnek időegységre eső megváltozását **szöggyorsulás**nak nevezzük.
Jele: β

Az érintő irányú gyorsulás egyenesen arányos a sugárral, az arányossági tényező a szöggyorsulás.

$$\mathbf{a_é = r \cdot \beta}$$

Kísérleti összeállítás egyenletesen változó körmozgás létrehozására



Függőleges tengelyre erősített korongot úgy hozunk forgó mozgásba, hogy a korong kerületére csavart fonalat csigán átvezetjük, és a végére m tömegű testet erősítünk.

- A kísérleti összeállításban az m tömegű test egyenletesen változó mozgást végez függőleges egyenes mentén.

- Ennek köszönhetően a korong pontjai is egyenletesen változó mozgást végeznek, de körpálya mentén.

Mi csak a korong egy kerületi pontját vizsgáljuk, ami így egyenletesen gyorsuló körmozgást végez.

- Az m tömegű test egyenes vonalú egyenletesen változó mozgását leíró kinematikai egyenletekből levezethető a korong bármely kerületi pontjának mozgásegyenlete.

- Így jutunk el az egyenletesen változó körmozgást végző test kinematikai egyenleteihez.

Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás kinematikai egyenletei	Egyenletesen változó körmozgás kinematikai egyenletei	
$h = v_o t + \frac{a}{2} t^2$	$i = v_{ko} \cdot t + \frac{a_é}{2} t^2$ $\downarrow \quad \downarrow$ $\varphi \cdot r = \omega_o \cdot r \cdot t + \frac{\beta \cdot r}{2} t^2$ $\boxed{\varphi = \omega_o t + \frac{\beta}{2} t^2}$	Amíg az m tömegű test h utat tesz meg, addig a korong pontjai ugyanakkora ívvel fordulnak el.
$h = \frac{(v_o + v_t)\, t}{2}$	$i = \frac{(v_{ko} + v_{kt})\, t}{2}$ $\varphi \cdot r = \frac{(\omega_o \cdot r + \omega_t \cdot r)\, t}{2}$ $\boxed{\varphi = \frac{(\omega_o + \omega_t)\, t}{2}}$	Egyenletesen változó körmozgásnál a szögelfordulást e két bekeretezett képlet segítségével fejezhetjük ki.
$v_t = v_o + a\, t$	$v_{kt} = v_{ko} + a_é\, t$ $\downarrow \quad \downarrow$ $\omega_t \cdot r = \omega_o \cdot r + \beta \cdot r \cdot t$ $\boxed{\omega_t = \omega_o + \beta \cdot t}$ Egyenletes körmozgásnál a szögsebesség idő kapcsolata.	

b) Egyenletesen változó körmozgás dinamikai leírása

Pontszerű test egyenletesen változó körmozgásához olyan eredő erő szükséges, amely két komponensből áll.

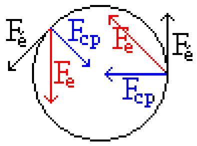
Érintő irányú erő

- a pálya menti sebességet változtatja,
- nagysága állandó,
- iránya mindig érintő irányú.

Centripetális erő

- körpályán való maradáshoz szükséges erő,
- nagysága az idő négyzetével arányosan változik,
- iránya mindig sugár irányú.

Az eredő erőt Pitagorasz-tétellel számoljuk ki.



$F_é = m \cdot a_é = m \cdot r \cdot \beta = \text{áll.}$ $\qquad (a_é = r \cdot \beta)$

$F_{cp} = m \cdot a_{cp} = m \cdot \omega_t^2 \cdot r = m \cdot r \cdot \beta^2 \cdot t^2 = \text{változó}$ (mert t^2 változik!)

$$\mathbf{F_e = \sqrt{F_é^2 + F_{cp}^2}}$$

Példák egyenletesen változó körmozgásra

- Egyenletesen gyorsuló autó kerekének egy pontja
- A fúrófej egy pontja a fúró bekapcsolásakor és leállításakor
- Kerekeskút kerekének egy pontja, ha a vízzel megtelt vödör gyorsulva mozog lefelé

III. Forgómozgás

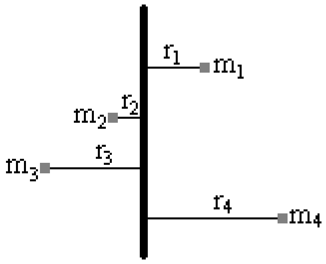
a) Forgómozgás létrejöttének dinamikai feltétele

Ha egy tengellyel ellátott merev testre olyan erő hat, aminek a hatásvonala nem megy át a forgástengelyen, akkor a merev test forgómozgást végez.

Az erő által létrehozott forgatónyomaték egyenesen arányos a szöggyorsulással.

$$\mathbf{M \sim \beta}$$

A kettő hányadosa egy állandót határoz meg, amelyet tehetetlenségi nyomatéknak nevezünk.
Jele: Θ
A tehetetlenségi nyomaték értéke nemcsak a test tömegétől, hanem a tengelyhez viszonyított tömegeloszlástól függ.



Bármely forgó test a forgástengelyhez viszonyított tehetetlenségi nyomatékát megkapjuk, ha az egyes tömegpontoknak forgástengelytől mért távolság négyzetét szorozzuk a tömegpont tömegével, majd ezeket összegezzük.

$$\Theta = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2$$

<u>A forgómozgást leíró dinamikai törvény</u>

A forgatónyomaték egyenesen arányos a szöggyorsulással, az arányossági tényező a tehetetlenségi nyomaték.

$$\mathbf{M = \Theta \cdot \beta}$$

b) Forgási energia

Ha egy tengellyel ellátott test forgómozgást végez, akkor a mozgásából származó energiát forgási energiának nevezzük.

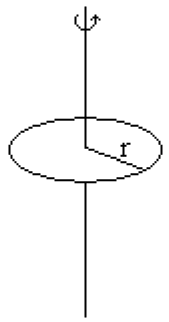
$$\mathbf{E_{forg} = \frac{1}{2} m \cdot v_k^2 = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2}$$

$$E_{forg} = \frac{1}{2}\Theta \cdot \omega^2$$

A forgási energia egyenesen arányos a szögsebesség négyzetével, az arányossági tényező a tehetetlenségi nyomaték fele.

c) Perdület, perdülettétel és perdület-megmaradásának törvénye

Egy tengely körül forgó test forgásmennyiséggel rendelkezik, és ezt a forgásmennyiséget **perdületnek** nevezzük. Jele: N



$$N = \Theta\,\omega$$

$$[N] = kgm^2 \cdot \frac{1}{s} = \frac{kgm^2}{s}$$

A perdületet a tehetetlenségi nyomaték és a szöggyorsulás szorzatával fejezzük ki.

Forgó test perdületét forgató nyomaték változtatja meg. A változás mértéke attól függ, hogy mekkora forgatónyomaték, és mennyi ideig hat rá.

Mindez a forgómozgás alapegyenletéből levezethető:

$$M = \Theta \cdot \beta$$
$$M = \Theta \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$
$$M\Delta t = \Theta\,\Delta\omega$$
$$M\Delta t = \Delta N \qquad M\Delta t = \text{forgató lökés}$$

Perdülettétel

A forgató lökés megegyezik a perdület megváltozásával.

Perdület megmaradásának törvénye

$$M = 0$$
$$M\Delta t = 0$$
$$\Delta N = 0$$
$$N = \text{áll.} \qquad N_1 = N_2$$

Zárt mechanikai rendszerben amikor egy forgó testre nem hat forgatónyomaték, akkor a perdület állandó.